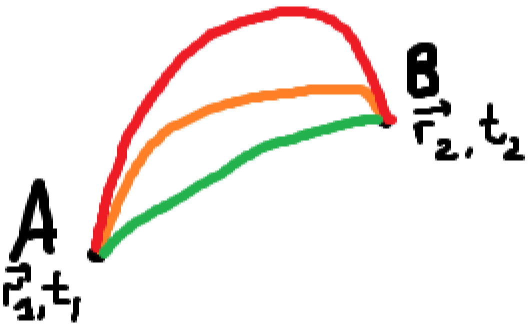
Если я вас попрошу назвать самое главное уравнение физики, вероятно, вы назовёте F=ma.
Теормех достаточно грубо задвигает Ньютона в сторону новым принципом, который лежит в основе современной теорфизики:
Частица движется так, чтобы минимизировать действие.



Существует множество траекторий в пространстве, ведущих из точки $\vec{r_1}$ в точку $\vec{r_2}$. Существует множество законов движения, ведущих из точки $\vec{r_1}$ в момент времени t_1 в точку $\vec{r_2}$ в момент t_2. По какому из них полетит частица? Да потому, по которому

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

Величина S называется действием, а величина L – лагранжианом.

Самый простой лагранжиан – это L=T-U, кин.энергия минус потенциальная. Оказывается, частица летит по такому закону движения, чтобы минимизировать вдоль пути разность кин.энергии и потенциальной:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$$

У любого человека на этом моменте возникает 2 логичных вопроса:
1) Почему частица пытается минимизировать действие? Она что, имеет разум, чтобы анализировать все возможные маршруты?
2) Даже если это так, почему лагранжиан имеет вид L=T-U?

Со вторым вопросом позже, это можно показать (не будем этого делать). А вот на первый вопрос на нашем уровне – уровне 4-го и 5-го семестров – ответить невозможно. Конечно, у частицы нет разума. Тогда что заставляет её минимизировать действие? Вкратце – она всегда летит равномерно по прямой (!), просто любое взаимодействие (электромагнитное, гравитационное) искривляет пространственно-координатную сетку (э/м всего лишь сетку, а гравитационное само пространство-время, это ещё более глубокое искажение). Непонятно? Ну, увы, теормех на ФФ даётся раньше электрода. Я бы на месте учебки сделал бы наоборот, что ж поделать. Придётся вам верить мне на слово… как на ядре.

Более подробно это описывает Смилга в книжке «Квантовая теория поля», проводя свой пример. Процитирую его:

Начнём с простейшего нетривиального примера: движения вертикально брошенного в небо камня. Рассмотрим все возможные траектории $z(t)$, такие что в начальный момент времени t_0 камень находится на высоте z_0, а в некоторый более поздний момент времени $t_1 > t_0$ его высота равна z_1. Значения $t_{0,1}$ и $z_{0,1}$ будем предполагать фиксированными.

Вычислим интеграл *действия*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt(T - U) = \int_{t_0}^{t_1} dt\left[\frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz\right], \tag{7.1}$$

где T — кинетическая, а U — потенциальная энергии. Утверждение (*принцип наименьшего действия*) состоит в том, что для истинной

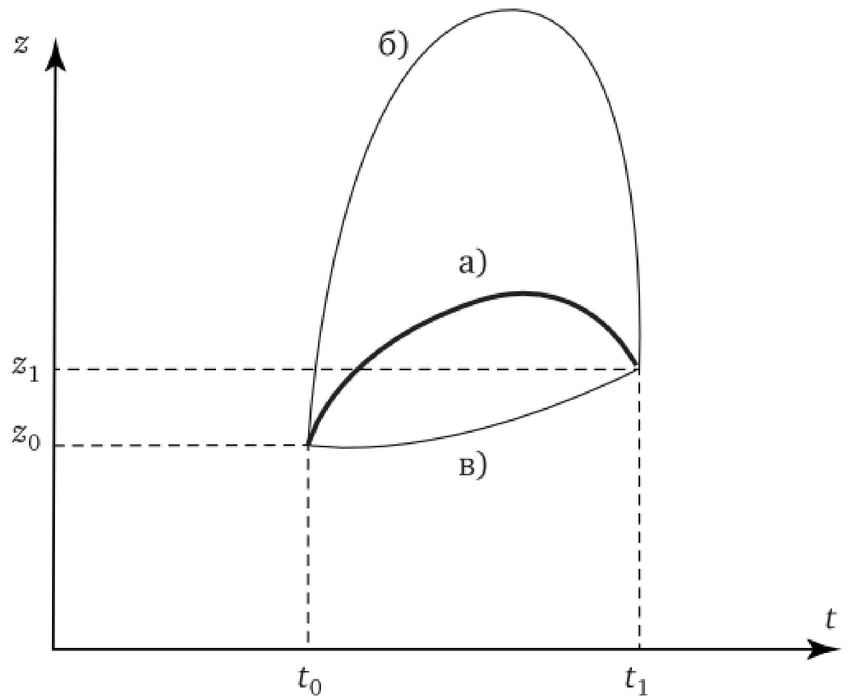


Рис. 7.1. Траектории камня: а) с минимальным действием; б) слишком большое T; в) слишком маленькое U

физической траектории $z^{\text{физ}}(t)$ этот интеграл принимает минимальное значение. Это проиллюстрировано на рис. 7.1. Чтобы достичь минимального значения действия (7.1), камню хотелось бы увеличить свою потенциальную энергию и забраться как можно выше. Но поскольку у него назначено свидание — в фиксированный момент времени t_1 он должен оказаться в точке z_1, — он не может забираться слишком высоко. Тогда он пролетел бы большое расстояние, для чего он должен был бы лететь с большой скоростью, а тогда интеграл действия (7.1) получил бы большой положительный вклад от члена с кинетической энергией.

Истинная траектория, кривая a) на рис. 7.1, — это результат переговорного компромисса между T и U.

Смилга использовал слово «траектория». И это очень плохой термин. К сожалению, он достаточно общеупотребителен.

Траектория в привычном нами понимании – это кривая на плоскости или в пространстве.

Мы можем подсчитать потенциальную энергии частицу в каждой точке этой кривой. Но мы не можем подсчитать кинетическую энергию частицы! Она зависит не от **r**, а от производной **r** по времени!

Более удачным будет термин «отчёт». Поясню, что я имею в виду. Частица хочет добраться за заданное время в заданную точку, но перед тем, как отправиться в путь, она подаёт нам «отчёт» о будущей поездки в виде функции **r**(t) – где она будет в заданный момент времени. Вот уже имея эту функцию, мы можем подсчитать скорость в любой момент времени, затем функцию Лагранжа, а потом и действие вдоль кривой, по которой она собралась двигаться. Т.е. **r**(t) в этом плане хороша и однозначно определяет всё на свете. Я это называю «отчётом»: частица отчитывается перед нами, как она планирует двигаться и где планирует быть в каждый момент времени.

Кривая же определяет «отчёт» неоднозначно. Да, мы знаем трассу, но мы не знаем, будет ли частица двигаться по этой кривой равномерно или где-то быстрей, где-то медленней. Поэтому термин «траектория»= «кривая» неудачный.

Почему же такой умный человек, как Смилга, использует термин «траектория»? Потому что он уже привык к 4-мерному пространству-времени, где 4-мерная кривая (мировая линия) действительно однозначно описывает движение частицы. Т.е. существует взаимно однозначное соответствие между функцией **r**(t) в 3D и четырёхмерной кривой-траекторией.

Однако в 3D использовать термин «траектория» не рекомендую по указанным выше причинам.

Уравнение Эйлера-Лагранжа

Зато я смогу вам ответить на вопрос, зачем всё это нужно. Теперь у нас вместо F=ma будет более совершенный способ решать задачи по механике.

Пусть Лагранжиан имеет вид $L(q, \dot{q}, t)$ - т.е. зависит от времени, координат и первых производных коодринат по времени. Тогда условие минимизации действия равносильно

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Дамы и господа, вот оно – уравнение Эйлера-Лагранжа! Доказательство его – в конце курса интуров, а повторяться мы не будем. Хотя преподаватели по теормеху любят на этом месте проводить «рукомахательное показательство».

Пример:

1) Гармонический осциллятор:

$$T = \frac{m\dot{x}}{2}$$

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

Поэтому лагранжиан равен

$$L = T - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

Теперь надо применить

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Считаем частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right)}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right)}{\partial \dot{x}} = -kx$$

Получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\dot{x}) - (-kx) = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

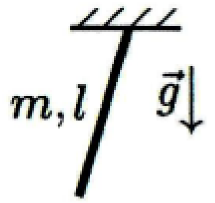
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Старое-доброе уравнение колебаний! Его решение – синусоидальные колебания с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Конечно, в данной задаче Лагранжев формализм был пушкой по воробьям – мы получили известный результат. Но Лагранжев формализм помогает быстро решить те задачи, где Ньютон бы долго возюкался.

Ещё задача:

Задача 2.2.4. Стержень массы m и длины l шарнирно закреплен в верхней точке и может совершать плоское движение в вертикальном поле тяжести $\vec{g}$. Построить лагранжиан системы. Найти закон движения в квадратурах в общем виде для произвольного движения стержня. Записать уравнения Лагранжа. Рассматривая частный случай малых отклонений стержня от вертикали, найти частоту малых линейных колебаний.



Пишем кин.энергию:

$$T = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2}$$

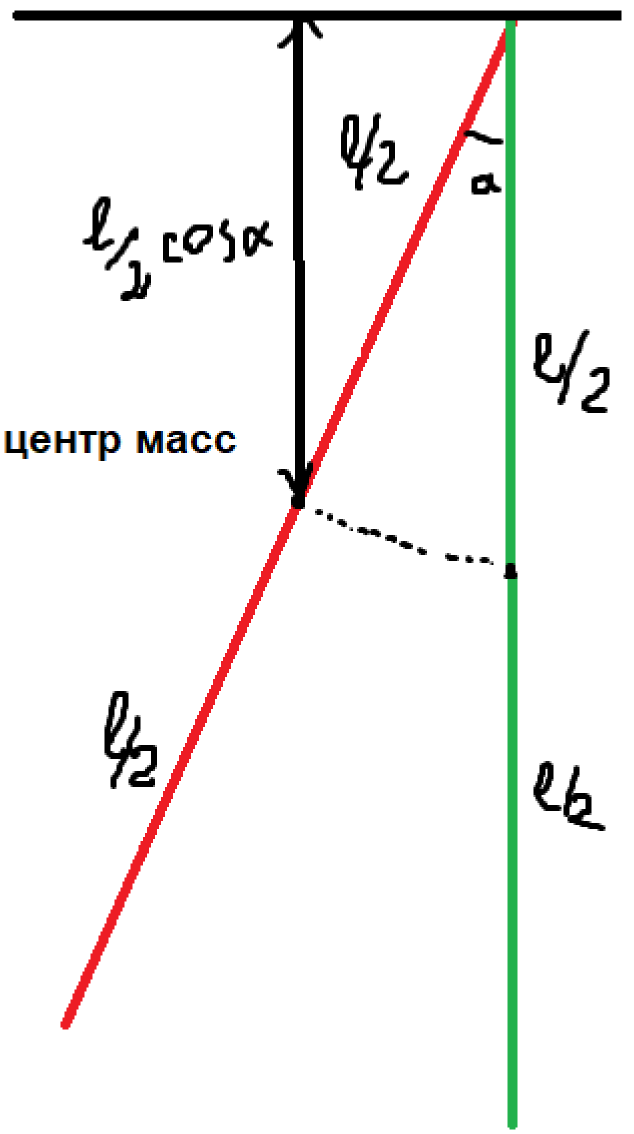
Момент инерции палки относительно её конца равен $\frac{ml^2}{3}$, так что

$$T = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{ml\dot{\alpha}^2}{6}$$

Мы выбрали в качестве обобщённой координаты α. Значит, и потенциальную энергию мы должны выразить через α.

$$U = mgz_{\text{ц.м.}}$$

где $z_{\text{ц.м.}}$ – аппликата центра.



Из рисунка явно видно, что

$$z_{\text{ц.м.}} = -\frac{l}{2} cos\alpha$$

$$U = mgz_{\text{ц.м.}} = -\frac{mgl}{2} cos\alpha$$

$$L = T - U = \frac{ml\dot{\varphi}^2}{6} + \frac{mgl}{2}\cos\alpha$$

Лагранжиан записали!

Теперь пишем ур-я Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) + \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}ml^2\dot{\alpha}\right)+\frac{1}{2}mgl\sin\alpha=0, \qquad (2.86)$$

или, что то же самое,

$$\ddot{\alpha}+\frac{3g}{2l}\sin\alpha=0, \qquad (2.87)$$

В случае малых колебаний стержня, что подразумевает малость отклонения от положения равновесия (от вертикали) угол α можно считать бесконечно малым:

$$\alpha\to 0.$$

Тогда, воспользовавшись асимптотической формулой

$$\sin\alpha\simeq\alpha,$$

перепишем уравнение движения (2.87) в виде:

$$\ddot{\alpha}+\frac{3g}{2l}\alpha=0, \qquad (2.88)$$

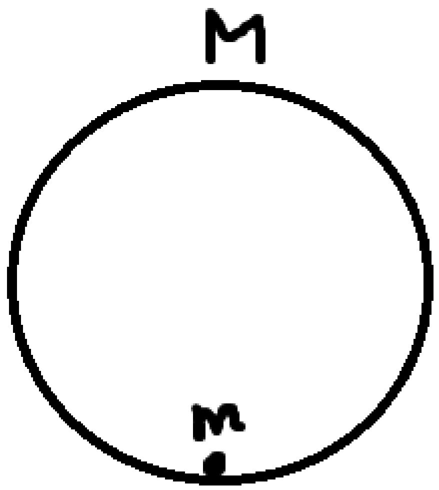
что представляет собой уравнение гармонических колебаний с циклической частотой

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

Решим ещё задачу, которая предлагалась на экзамене по теормеху в конце 5-го семестра:

Задача № 94

Полый цилиндр массы M и радиуса R перекатывается без проскальзывания по горизонтальной плоскости. На краю цилиндра закреплена точечная масса m. Найти частоту малых колебаний.



Очевидно, что положение равновесия соответствует случаю, когда массам m находится вниз.
Пусть она отклонена на малый угол φ. Запишем кинетическую и потенциальную энергию:

$$W_п = mgR(1-\cos\varphi) \approx mgR\frac{\varphi^2}{2}$$

$$W_k = (M+m)\frac{(R\dot{\varphi})^2}{2}$$

(За счёт того, что цилиндр полый, все точки конструкции движутся с одной и той же по модулю скоростью. Иначе бы пришлось считать момент инерции).

$$L = (M+m)\frac{(R\dot{\varphi})^2}{2} - mgR\frac{\varphi^2}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Подставляем функцию Лагранжа и её частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((M+m)R^2\dot{\varphi}\right)+mgR\varphi=0$$

$$(M+m)R\ddot{\varphi}+mg\varphi=0$$

$$\ddot{\varphi}+\underbrace{\frac{mg}{(M+m)R}}_{\omega^2}\varphi=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{mg}{(M+m)R}}$$